الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية | الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي | دورة: جوان 2013

الشعبة: علوم تجريبية

اختبار في مادة: الرياضيات | المدة: 03 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأوّل: (04.5 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقط:

$A(-1;1;3)$ ، $B(1;0;-1)$ ، $C(2;-1;1)$ ، $D(2;0;-1)$ و المستوي (P) ذا المعادلة: $2y+z+1=0$.

ليكن (Δ) المستقيم الذي تمثيل وسيطي له: $\begin{cases} x=-1 \\ y=2+\beta \\ z=1-2\beta \end{cases}$ حيث β وسيط حقيقي.

1) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC)، ثمّ تحقّق أن المستقيم (BC) محتوى في المستوي (P).

2) بيّن أن المستقيمين (Δ) و (BC) ليسا من نفس المستوي.

3) أ) احسب المسافة بين النقطة A و المستوي (P).

ب) بيّن أن D نقطة من (P)، و أن المثلث BCD قائم.

4) بيّن أن $ABCD$ رباعي وجوه، ثمّ احسب حجمه.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

I) المتتالية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\dfrac{5^{n+1}}{6^n}$

1) بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها و حدّها الأول.

2) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

II) المتتالية (u_n) معرّفة بـ: $u_0=1$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\sqrt{5u_n+6}$

1) برهن بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $1\le u_n\le 6$.

2) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

3) أ) برهن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $6-u_{n+1}\le \dfrac{5}{6}(6-u_n)$.

ب) بيّن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\le 6-u_n\le v_n$. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة، المعادلة (I) ذات المجهول z التالية:

$z^2-(4\cos\alpha)z+4=0$ ....(I) حيث α وسيط حقيقي.

2) من أجل $\alpha=\frac{\pi}{3}$؛ نرمز إلى حلي المعادلة (I) بـ z_1 و z_2. بيّن أن: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013}=1$.

3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B و C التي لاحقاتها: $z_A=1+i\sqrt{3}$ ؛ $z_B=1-i\sqrt{3}$ و $z_C=4+i\sqrt{3}$ على الترتيب.

أ) أنشئ النقط A ، B و C.

ب) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$، ثمّ استنتج أنّ C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ويطلب تعيين نسبته و زاويته.

ج) عيّن لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(C;2)\}$، ثم أنشئ G.

د) احسب z_D لاحقة النقطة D ، بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع.

x	f(x)
0,20	0,037
0,21	0,016
0,22	−0,005
0,23	−0,026
0,24	−0,048
0,25	−0,070

التمرين الرابع: (06.5 نقاط)

I) f الدالة المعرفة على $]-\infty;1[$ بـ: $f(x)=\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}$،

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim_{x\overset{<}{\to}1}f(x)$ ، ثمّ استنتج المستقيمين المقاربين للمنحنى (C).

2) احسب $f'(x)$. بيّن أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

3) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في $]-\infty;1[$ حلا وحيدا α. باستعمال جدول القيم أعلاه جِد حصرا للعدد α.

4) ارسم المستقيمين المقاربين و المنحنى (C)، ثمّ ارسم المنحنى (C') الممثل للدالة $|f|$.

5) عيّن بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقة m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)|=m$ حلان مختلفان في الإشارة.

II) g الدالة المعرفة على $]-\infty;1[$ بـ: $g(x)=f(2x-1)$. (عبارة $g(x)$ غير مطلوبة)

1) ادرس تغيرات الدالة g على $]-\infty;1[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

2) أ) تحقّق من أن: $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=0$ ، ثمّ بيّن أن: $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=2f'(\alpha)$.

ب) استنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

ج) تحقّق من أن: $y=\frac{2}{(\alpha-1)^3}x-\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T).

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية: $(E)\quad ......\quad z^2+4z+13=0$

1) تحقّق أن العدد المركب $-2-3i$ حل للمعادلة (E)، ثمّ جد الحل الآخر.

2) A و B نقطتان من المستوي المركب لاحقتاهما $z_A=-2-3i$ و $z_B=i$ على الترتيب. S التشابه المباشر الذي مركزه A ، نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ والذي يحوّل كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $M'(z')$.

أ) بيّن أن: $z'=\frac{1}{2}iz-\frac{7}{2}-2i$.

ب) احسب z_C لاحقة النقطة C ، علما أن C هي صورة B بالتشابه S .

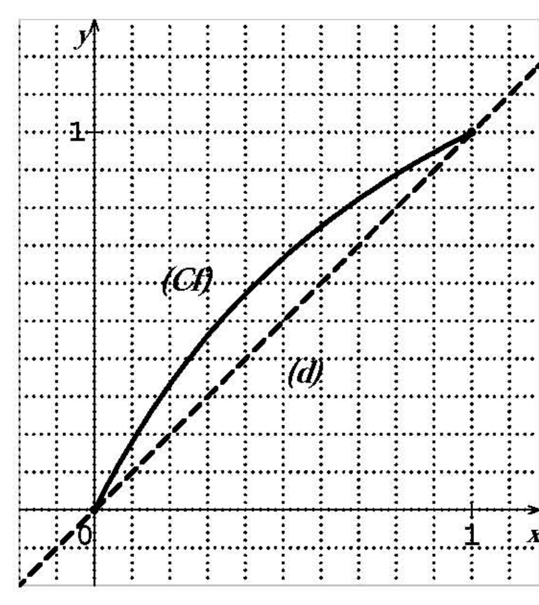
3) لتكن النقطة D ، حيث: $2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

أ) بيّن أن D هي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما.

ب) احسب z_D لاحقة النقطة D .

ج) بيّن أن: $\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=i$ ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ACD .

التمرين الثاني: (04 نقاط)



في الشكل المقابل، (C_f) هو التمثيل البياني للدّالة f المعرّفة على المجال $[0;1]$ بالعلاقة $f(x)=\frac{2x}{x+1}$ ،

و (d) المستقيم ذو المعادلة $y=x$.

1) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأوّل، $u_0=\frac{1}{2}$

و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) أعد رسم هذا الشكل في ورقة الإجابة، ثمّ مثّل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها، مبرزا خطوط التمثيل.

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها.

2) أ) أثبت أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$.

ب) برهن بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<1$.

ج) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

3) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=\frac{u_n-1}{u_n}$.

أ) برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، يطلب حساب حدّها الأول v_0 .

ب) احسب نهاية (u_n).

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقط $A(2;1;-1)$ ، $B(1;-1;3)$ ، $C\left(-\frac{3}{2};-2;1\right)$ و $D\left(\frac{7}{2};-3;0\right)$. ولتكن I منتصف القطعة $[AB]$.

1) أ) احسب إحداثيات النقطة I .

ب) بيّن أنّ: $2x+4y-8z+5=0$ معادلة ديكارتية لـ (P)؛ المستوي المحوري لـ $[AB]$.

2) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة C و $\vec{u}(1;2;-4)$ شعاع توجيه له.

3) أ) جد إحداثيات E نقطة تقاطع المستوي (P) و المستقيم (Δ).

ب) بيّن أنّ (Δ) و (AB) من نفس المستوى، ثمّ استنتج أن المثلث IEC قائم.

4) أ) بيّن أنّ المستقيم (ID) عمودي على كل من المستقيم (AB) و المستقيم (IE).

ب) أُحسب حجم رباعي الوجوه $DIEC$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) g الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+2x+4-2\ln(x+1)$

1) ادرس تغيّرات الدالة g ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) استنتج أنه، من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $g(x)>0$.

II) f الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-\dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$

و $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.(وحدة الطول $2\,cm$)

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)$. فسّر النتيجة بيانيا.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) بيّن أنّه، من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$ ، حيث f' هي مشتقة الدالة f .

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

ج) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$ ، ثمّ تحقق أن $0<\alpha<0,5$.

3) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى $\left(C_f\right)$ عند $+\infty$.

ب) ادرس وضعية المنحنى $\left(C_f\right)$ بالنسبة إلى (Δ).

4) نقبل أن المستقيم (T) ذا المعادلة : $y=x+\dfrac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس للمنحنى $\left(C_f\right)$ في نقطة فاصلتها x_0 .

أ) احسب x_0 .

ب) ارسم المستقيمين المقاربين والمماس (T) ثم المنحنى $\left(C_f\right)$.

ج) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلّين متمايزين.

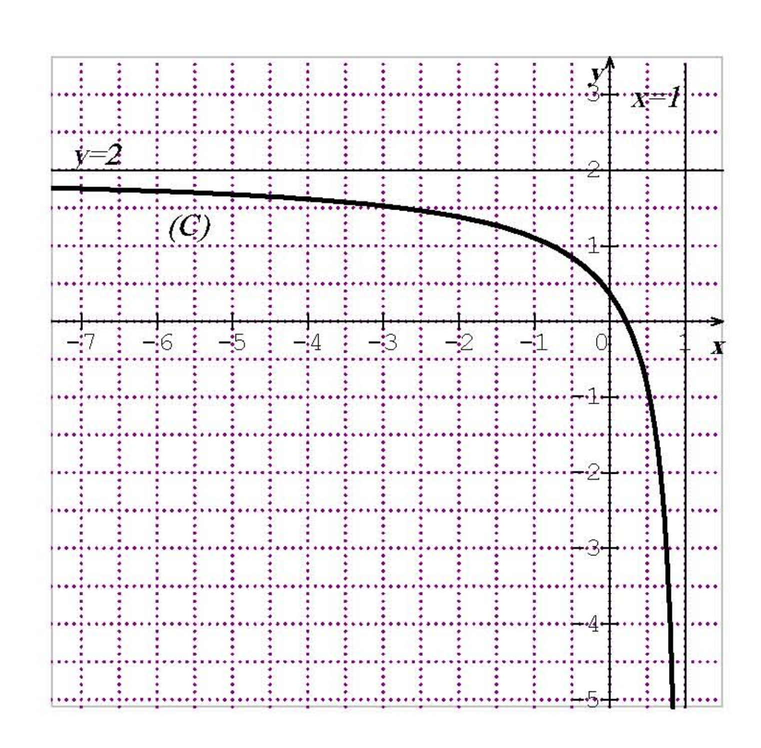
عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
الموضوع الأول **التمرين الأول (04,5 نقط)** 1) التمثيل الوسيطي للمستقيم (BC) : $x=1+t$ ؛ $y=-t$ ؛ $z=-1+2t$ $(t\in R)$ (BC) محتوى في (P) : $2(-t)+(-1+2t)+1=0$	0,75 0,5	01,25
2) (Δ) و (BC) غير متوازيين وغير متقاطعين إذن (Δ) و (BC) ليسا من نفس المستوي.	$2\times0,5$	1
3) أ) المسافة بين A و (P) $d(A;(P))=\frac{6\sqrt{5}}{5}$ ب) D نقطة من (P) $2(0)-1+1=0$ BCD مثلث قائم $BC^2=6$ ، $BD^2=1$ ، $CD^2=1$ 4) $ABCD$ رباعي الوجوه $A\in(P)$ لأن $d(A,(P))\neq0$ علما أن $(P)=(ABC)$ - حجم رباعي الوجوه $ABCD$ $V=\frac{1}{3}A_{(BCD)}\times d(A;(P))=1uv$	0,5 0,25 0,5 0,5 0,5	02,25

التمرين الثاني (04 نقط) I) 1) (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{5}{6}$ و حدّها الأول $v_0=5$	0,75	01
2) $\lim_{n\to+\infty}v_n=0$	0,25	
II) 1) من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $1\le u_n\le6$ .... 2) (u_n) متزايدة تماما $u_{n+1}-u_n>0;u_{n+1}-u_n=\frac{(6-u_n)(1+u_n)}{\sqrt{5u_n+6}+u_n}$ 3) أ) من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $6-u_{n+1}\le\frac{2}{3}(6-u_n)$ $(\frac{1}{6+\sqrt{5u_n+6}}<\frac{1}{6})$ ب) من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $0\le6-u_n\le v_n$ (يمكن استعمال البرهان بالتراجع) $\lim_{n\to+\infty}u_n=6$ $(\lim_{n\to+\infty}v_n=0$ و $\lim_{n\to+\infty}u_n=6)$.	1 0,5 0,5 0,5 0,5	03

		التمرين الثالث (05 نقط)
01	0,5 0,5	1) $\Delta = 4i^2\sin^2\alpha$ .... $z' = 2(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ ، $z'' = 2(\cos\alpha - i\sin\alpha)$ ....
01,25	0,25 $2\times0,5$	2) تحديد $z_1 = 1+i\sqrt{3}$ ، $z_2 = 1-i\sqrt{3}$ (أو العكس)........ $\frac{z_1}{z_2} = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$ و $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = +1$ ....
02,75	0,75 0,5 0,5 $2\times0,25$ 0,5	3) أ) إنشاء النقط A ، B و C ($A \in C_{(O;2)}$ وفاصلتها 1 و B نظيرة A بالنسبة $(x'x)$ و C لها نفس ترتيب A . ب) $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\sqrt{3}}{2}i$ .... $z_C - z_A = \frac{\sqrt{3}}{2}i(z_B - z_A)$ ، C صورة B بالتشابه الذي نسبته $\frac{\sqrt{3}}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ جـ) $z_G = 4+2i\sqrt{3}$ إنشاء G........ د) $z_D = 4$ ....

		التمرين الرابع: (06,5 نقط)
01	0,5 0,5	I) 1) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$ ؛ $\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = -\infty$ .... $y = 2$ ، $x = 1$ معادلتا مستقيمين مقاربين ....
01	0,5 0,25 0,25	2) من أجل $x \in]-\infty;1[$ ، $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}(1+e^{\frac{1}{x-1}})$ .... بما أنّ $f'(x) < 0$ من أجل كل $x \in]-\infty;1[$ فإنّ f متناقصة تماما على $]-\infty;1[$ .... جدول التغيّرات ....
0,5	0,25 0,25	3) للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α من $]-\infty;1[$ (مبرهنة القيم المتوسطة) $0,21 < \alpha < 0,22$ ....
01,25	0,5 0,5 0,25	4) إنشاء المستقيمين المقاربين لـ (C) .... إنشاء المنحنى (C) .... إنشاء المنحنى (C') الممثل للدالة $\lvert f \rvert$ ....
0,25	0,25	5) للمعادلة $\lvert f(x) \rvert = m$ حلّين مختلفين في الإشارة من أجل $m \in \left]\frac{1}{e};2\right[$ ....
01,5	$0,25\times2$ 0,25	II) 1) $g'(x) = f'(2x-1)$ إذا كان $x < 1$ فإن $2x-1 < 1$ ، وعليه $f'(2x-1) < 0$ g متناقصة تماما على $]-\infty;1[$ ....

	0,5 0,25	$\lim_{x \to -\infty} g(x) = 2$ ، $\lim_{x \overset{<}{\to} 1} g(x) = -\infty$ .... جدول تغيّرات g (نفس جدول تغيرات f) ....
1	$2 \times 0,25$ 0,25 0,25	2) أ) $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = f(\alpha) = 0$ ، $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'(\alpha)$ .... ب) (T) معادلة له: $y = 2f'(\alpha)\left(x - \frac{\alpha+1}{2}\right)$ .... ج) $(T): y = \left(\frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}\right)$ $(e^{\frac{1}{\alpha-1}} = -\frac{\alpha}{\alpha-1})$ ....



		الموضوع الثاني **التمرين الأول: (04,5 نقط)**
1	0,5 0,5	1) $-2-3i$ حل للمعادلة (E) $\quad (-2-3i)^2+4(-2-3i)+13=0$ .... استنتاج الحل الآخر للمعادلة (E) . $\overline{-2-3i}$ ....
01,5	1 0,5	2) أ) الكتابة المركبة للتشابه S $\quad z'-z_A=\frac{1}{2}e^{i(\frac{\pi}{2})}(z-z_A)$......... ب) $z_C=-4-2i$ ....
02	0,5 0,5 0,5 0,5	3) أ) D مرجح النقطتين A و B مرفقين بالمعاملين -3 و 1 على الترتيب .... ب) لاحقة D هي $z_D=-3-5i$ .... ج) $\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=i$ .... ACD مثلث قائم في A و متساوي الساقين ($AD=AC$ و $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})=\frac{\pi}{2}$)

04	**0,50**	**التمرين الثاني: (04 نقط)** 1) أ) تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3:
	0,25	ب) التخمين: (u_n) متزايدة تماما و متقاربة.
	0,50	2) أ) $f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$ ، f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$.
	0,50	ب) البرهان بالتراجع أنّ من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ: $0<u_n<1$.
	0,75	جـ) من أجل كل n من $\mathbb{N}$ لدينا: $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-u_n)}{u_n+1}$ و منه $u_{n+1}-u>0$ أي (u_n) متزايدة تماما.
	0,75	3) أ) من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$. الحد الأول : $v_0=-1$.
	0,50	ب) من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $v_n=-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ؛ $u_n=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.
	0,25	$\lim_{n\to+\infty}u_n=1$. (لأن $\lim_{n\to+\infty}v_n=0$).

التمرين الثالث (04,5 نقط)		
1) أ) $I\left(\frac{3}{2};0;1\right)$ .... ب) التحقق أنّ I نقطة من (P) (تقبل كل طريقة سليمة).................... $\overrightarrow{AB}$ ناظمي لـ (P)	$0,25$ $0,25$ $0,5$	**01**
2) (Δ) تمثيل وسيطي له $(k \in \mathbb{R})$ $\begin{cases} x = k - \frac{3}{2} \\ y = 2k - 2 \\ z = -4k + 1 \end{cases}$ (يقبل أي تمثيل وسيطي آخر)............	$0,5$	**0,5**
3) أ) تقاطع (P) و (Δ) : $t = \frac{1}{3}$ و منه $E\left(-\frac{7}{6};-\frac{4}{3};-\frac{1}{3}\right)$	$2 \times 0,5$	**01**
ب) (AB) و $\vec{u}$ مرتبطان خطيا .... أي المثلث IEC قائم في E (يقبل أي تبرير) $(EC^2 + IE^2 = IC^2)$	$0,5$ $0,5$	**01**
4) أ) $(ID) \perp (AB)$ و $(ID) \perp (IE)$ .... ب) حجم رباعي الوجوه $DIEC$ $V = \frac{\mathbf{28}}{\mathbf{9}} uv$	$2 \times 0,25$ $0,5$	**01**

التمرين الرابع (07 نقط)		
I) $g(x) = x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)$ 1) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} g(x) = +\infty$ .... $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$	$0,25$ $0,5$	**0,75**
من أجل $x \in]-1;+\infty[$ ، $g'(x) = \frac{2x^2 + 4x}{x+1}$ .... إشارة $g'(x)$ حسب قيم x إذا كان $-1 < x \leq 0$ فإن $g'(x) \leq 0$ و إذا كان $x \geq 0$ فإن $g'(x) \geq 0$ جدول التغيّرات .... 2) $g(x) \geq 4$ ومنه $g(x) > 0$	$0,5$ $0,25$ $0,25$ $0,25$	**01,25**
II) 1) أ) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x) = -\infty$ .... $x = -1$ معادلة مستقيم مقارب .... ب) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[x - \frac{1}{x+1} + 2\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right] = +\infty$	$0,25$ $0,25$ $0,25$	**0,75**

2) أ) $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$ .... ب) f دالة متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ .... جدول تغيّرات f .... جـ) للمعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدا في $]-1;+\infty[$ (مبرهنة القيم المتوسطة) $f(0)=-1$ و $f(0,5)\approx 0,37$. $0<\alpha<0,5$	0,5 0,25 0,25 0,25 0,25	01,5
3) أ) $y=x:(\Delta)$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=0$ ب) .... $f(x)-x=\dfrac{-1+2\ln(x+1)}{x+1}$ استنتاج وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) x: -1 ‖ $-1+\sqrt{e}$ ‖ $+\infty$ $f(x)-x$: ‖ - 0 +	0,25 0,25 0,5	01
4) أ) $x_0=-1+\sqrt{e^3}$،	0,5	0,5
ب) رسم المستقيمين المقاربين، المماس (T) و (C_f) .... جـ) $0<m<\dfrac{2}{\sqrt{e^3}}$	1 0,25	1,25

